Экзамен по курсу: "Алгебра и геометрия"

1 курс 1 семестр

Вариант номер 112D 337

1. Докажите, что для любых комплексных чисел a и b имеет место тождество
$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2.$$

2. Докажите, что полилинейная функция столбцов квадратной матрицы, обнуляющаяся при совпадении любой пары столбцов, совпадает с определителем этой матрицы, умноженным на значение данной функции на столбцах единичной матрицы.

3. Докажите, что коммутативная ассоциативная алгебра с делением является полем.

4. Пусть $r < k \leq n$ и A — вещественная $n \times n$-матрица ранга r. Докажите, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ из A можно получить матрицу ранга k, изменив каждый элемент не более чем на ε.